

halten, wie z. B. Transportvorgänge kondensierbarer Gase und Wirksamkeit von Baffle-Anordnungen.

Ein Teil der Untersuchungen wurde im Rahmen eines Balzers-Forschungsauftrages im Physikinstitut des Reaktorzentrums Seibersdorf durchgeführt.

Die Autoren möchten Herrn Dr. E. A. TRENDELENBURG für die anregenden Diskussionen und den Herren Dipl.-Ing. H. MANDL und E. BÜCHEL für ihre Hilfe bei der Durchführung der Experimente danken.

Die Ionenbahnen dritter Näherung in magnetischen Sektorfeldern einschließlich ihrer Streufelder *

RAINER LUDWIG

II. Physikalisches Institut der Universität Gießen

(Z. Naturforschg. 22 a, 553—565 [1967]; eingegangen am 25. November 1966)

Für das homogene magnetische Sektorfeld mit gekrümmten Feldbegrenzungen und schrägem Ein- und Austritt wird die Gleichung des Nebenstrahls eines Ionenbündels mit radialer und axialer Öffnung relativ zu dessen Mittelstrahl in dritter Näherung bestimmt. Damit werden die Bildfehlerkoeffizienten 3. Ordnung gewonnen. Die Streufelddeinwirkungen werden ebenfalls in dritter Näherung behandelt, wobei die im Streufeldbereich stattfindende Gesamttablenkung durch das Modell eines „Ersatzstrahlenganges“ mit Knickeung und Versetzung des Strahls an einer zu bestimmenden „Ersatzfeldgrenze“ beschrieben wird. Numerische Beispiele werden angegeben. Bisher^{1—12} waren entsprechende Rechnungen nur bis in 2. Näherung durchgeführt.

Fliegt ein Ion durch ein magnetisches Sektorfeld mit ebenen Polschulen, so daß sein Geschwindigkeitsvektor v mit der Mittelebene des Magnetfeldes einen kleinen Winkel β einschließt (Abb. 1), dann erfährt seine im feldfreien Raum zunächst geradlinige Bahn schon vor der geometrischen Polschuhgrenze durch das Streufeld eine stetig zunehmende Krümmung, die im homogenen Teil des Feldes einen konstanten Wert erreicht. Auf der Austrittsseite nimmt die Krümmung wieder stetig bis auf den Wert Null ab. Für eine Bahnberechnung muß die Feldstärke als Funktion des Ortes in der Umgebung der Bahn bekannt sein. Für die Streufeldbereiche ist eine entsprechende Feldverteilung zunächst nicht bekannt und kann rechnerisch nur in Sonderfällen ermittelt werden. Man wird daher versuchen, mit experimentell gemessenen Streufeldverteilungen das Problem zu lösen. Die Bahnberechnung erfolgt daher zweckmäßig getrennt, zunächst für den homogenen Feldbereich (bekannte Feldverteilung), dann für den Streufeldbereich.

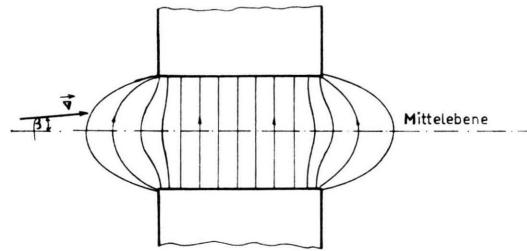


Abb. 1. Verlauf der Feldlinien bei ebenen Polschuhnen.

1. Die Nebenstrahlgleichung des homogenen Sektorfeldes

Unter Vernachlässigung des Streufeldes eines magnetischen Sektorfeldes entsteht ein idealisiertes, an den Grenzen der Magnetpolshuhe scharf abgeschnittenes Magnetfeld. Außerhalb der geometrischen Grenzen der Polshuhe herrscht dann kein Feld, innerhalb die konstante Feldstärke $B_z = B_0$ und $B_x = B_y = 0$. Die geometrische Begrenzung der

* Auszug aus D 26.

¹ L. A. KÖNIG u. H. HINTENBERGER, Z. Naturforschg. **10 a**, 877 [1955] u. **12 a**, 377 [1957].

² L. A. KÖNIG, Z. Naturforschg. **10 a**, 652 [1955].

³ M. COTTE, Ann. Phys. **10**, 333 [1938].

⁴ R. HERZOG, Z. Naturforschg. **10 a**, 887 [1955].

⁵ R. HERZOG, Z. Phys. **97**, 596 [1935].

⁶ R. HERZOG, Acta Phys. Austr. **4**, 431 [1950].

⁷ A. J. DEMPSTER, Phys. Rev. **11**, 316 [1918].

⁸ H. WOLNIK u. H. EWALD, Nucl. Instr. & Meth. **36**, 93 [1965].

⁹ W. PLOCH u. W. WALCHER, Z. Phys. **127**, 274 [1950].

¹⁰ N. D. COGGESHALL, J. Appl. Phys. **18**, 855 [1947].

¹¹ C. E. BERRY, Rev. Sci. Instrum. **27**, 849 [1956].

¹² H. A. ENGE, Rev. Sci. Instrum. **35**, 278 [1964].



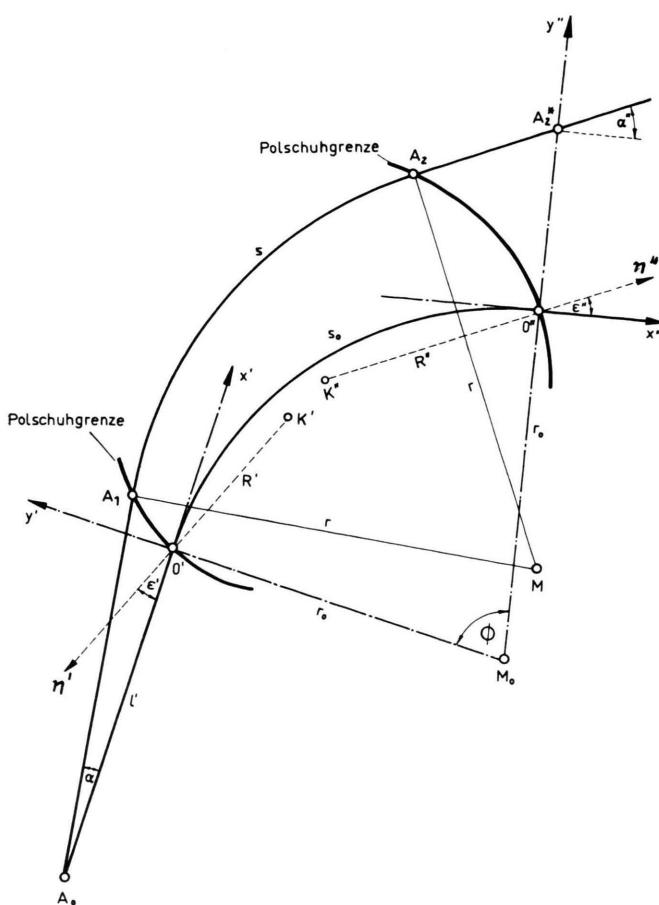


Abb. 2. Radialer Strahlverlauf im homogenen Magnetfeld.

Polschuhe am Ein- und Austritt des Ionenstrahls sei kreisförmig (Abb. 2). Der Krümmungsradius an der Eintrittsseite sei R' (Krümmungsmittelpunkt K'), an der Austrittsseite R'' (Krümmungsmittelpunkt K''). Die Richtung von B_0 bilde die z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems x, y, z . Die xy -Ebene soll „Mittelebene“ im Feld sein.

Die Bahn s_0 eines Ions mit der Masse m_0 , der Geschwindigkeit \bar{v}_0 , der elektrischen Ladung $e e_0$ (e_0 = Elementarladung, $e = 1, 2, \dots$) in der Mittelebene des Magnetfeldes verläuft vor und nach dem Feld geradlinig und stellt im Feld B_0 einen Kreis dar mit dem Radius $r_0 = m_0 \bar{v}_0 / e e_0 B_0$ und dem Mittelpunkt M_0 . s_0 wird Hauptstrahl oder Mittelbahn genannt. Der Eintrittspunkt $0'$ der Mittelbahn ins Feld sei der Ursprung des Koordinatensystems $x'y'$, wobei x' die Richtung des einfallenden Hauptstrahls hat. Entsprechendes gilt für den Austrittspunkt $0''$. Der Winkel des einfallenden (austretenden) Haupt-

strahls mit der Normalen n' (n'') zur Feldgrenze sei ϵ' (ϵ''). ϵ' und ϵ'' werden positiv gezählt, wenn einfallender bzw. austretender Hauptstrahl jeweils zwischen dem Ablenkzentrum M_0 und der Normalen n' bzw. n'' liegt. Ein beliebiger Ionenstrahl (Nebenstrahl), der zum Hauptstrahl windschief verläuft, wobei er z. B. durch den Punkt A_0 mit den Koordinaten $-l', 0, v r_0$ ($v \ll 1$) geht und mit der Mittelebene den Winkel β bildet, während seine Projektion in die Mittelebene mit der x -Achse bzw. dem Hauptstrahl den Winkel α einschließt, beschreibt im Feld eine Schraubenlinie, deren Projektion in die Mittelebene wieder ein Kreis ist mit dem Radius $r = m \bar{v} \cdot \cos \beta / e e_0 B_0$ bzw. $r = \sqrt{2} m U \cdot \cos \beta / e e_0 B_0$ und dem Mittelpunkt M . Masse, Geschwindigkeit und Energie U sollen sich um kleine Beträge von den Werten für den Hauptstrahl unterscheiden. Es gilt: $m = m_0(1 + \gamma)$, $U = U_0(1 + \delta)$ mit $\gamma \ll 1$, $\delta \ll 1$, ebenso $\alpha \ll 1$ und $\beta \ll 1$.

Der Verlauf des Nebenstrahl im „Bildraum“ ($0''$ -System) lässt sich durch die Geradengleichung

$$y'' = 0'' A_2^* + x'' \tan \alpha'' \quad (1)$$

darstellen 1 . $0'' A_2^*$ und $\tan \alpha''$ müssen nun berechnet werden. Beide Ausdrücke sind Funktionen der Parameterscharen $R', R'', l', \Phi, \epsilon', \epsilon''$, die die Geometrie des Feldes betreffen (Φ = Ablenkwinkel) und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die das Strahlenbündel charakterisieren. Die Berücksichtigung der Eintrittspaltbreite $2 u r_0$ (der Punkt A_0 hat dann die Koordinaten $-l', u r_0, v r_0$ mit $u \ll 1$) erfolgt zweckmäßig später. u und v zählen zur zweiten Parameterschar. Statt γ und δ wird eine Impulsabweichung τ eingeführt, gemäß $m \bar{v} = m_0 \bar{v}_0(1 + \tau)$, um die Rechnung zu vereinfachen und übersichtlicher zu halten. Man ordnet in Gl. (1) die Ausdrücke $0'' A_2^*$ und $\tan \alpha''$ nach Potenzen von α, β, τ und deren Produkten und erhält:

$$y'' = r_0 \sum_i M_i i + x'' \sum_i N_i i, \quad (2)$$

$i = \alpha, \tau, \alpha\alpha, \beta\beta, \tau\tau, \alpha\tau, \alpha\alpha\alpha, \tau\tau\tau, \alpha\beta\beta, \alpha\alpha\tau, \beta\beta\tau$. Damit sind die M_i und N_i nur noch Funktionen von $\Phi, \epsilon', \epsilon'', l', R', R''$. Eine weitere Aufgliederung der M_i und N_i nach Potenzen von l'/r_0 ist vorteilhaft. Die Bahnberechnungen in 2. Näherung lieferten alle ein- und zweifach indizierten Koeffizienten, während alle dreifach indizierten Koeffizienten neu zu bestimmen sind.

Um die Ausdrücke $0'' A_2^*$ und $\tan \alpha''$ zu berechnen, kann man nach zwei Methoden vorgehen. Ausgehend von der LORENTZSchen Bewegungsgleichung

eines elektrisch geladenen Teilchens in einem Magnetfeld, stellt man für die relative radiale Abweichung $\varrho = (r - r_0)/r_0$ des Nebenstrahls vom Hauptstrahl eine lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten auf:

($\varphi = \text{Azimut}$):

$$\begin{aligned} f(\varrho) = & \tau - \frac{1}{2} \varrho_1^2 - \tau^2 - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) + \varrho_1 \tau + \tau^3 + \tau \varrho_1^2 - 2 \tau^2 \varrho_1 \\ & - \frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2) (\varrho_1 - \tau) + (\tau - \frac{1}{2} \varrho_1^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{1}{2} \beta^2 + \varrho_1 \tau) \varrho \\ & - (\frac{1}{2} + \tau) \varrho^2 + \frac{1}{2} \varrho^3 + (1 + \beta - 2 \varrho) \left(\frac{d\varrho}{d\varphi} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Durch ein approximatives Lösungsverfahren für Gl. (3) erhält man $\varrho(\varphi)$ bis in 3. Näherung. Unter Beachtung der Krümmungen $1/R'$ und $1/R''$ sowie der Neigungswinkel ε' und ε'' der Feldgrenzen gewinnt man aus $\varrho(\Phi)$ und $(d\varrho/d\varphi)_{\varphi=\Phi}$ die gesuchten Ausdrücke $0'' A_2^*$ und $\tan \alpha''$.

Eine zweite Methode besteht darin, daß man nacheinander die Koordinaten der Punkte A_1 , M und A_2 auf Grund rein geometrischer Überlegungen in 3. Näherung bestimmt.

Mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} s &= \sin \Phi; \quad c' = \cos \varepsilon'; \quad t' = \tan \varepsilon' \\ c &= \cos \Phi; \quad c'' = \cos \varepsilon''; \quad t'' = \tan \varepsilon'' \\ S' &= \frac{\sin(\Phi - \varepsilon')}{\cos \varepsilon'}; \quad C' = \frac{\cos(\Phi - \varepsilon')}{\cos \varepsilon'}; \\ S'' &= \frac{\sin(\Phi - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''}; \quad C'' = \frac{\cos(\Phi - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''}; \\ \sigma &= \frac{\sin(\Phi - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}; \quad \lambda' = \frac{t'}{r_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{aaa} &= \mu_{aaa0} + \lambda' \mu_{aaa1} + \lambda'^2 \mu_{aaa2} + \lambda'^3 \mu_{aaa3}, \\ \mu_{aaa0} &= -\frac{1}{6} s + \frac{1}{2} s c (1 + t'^2) - \frac{1}{2} s C''^2 t''^2 + \frac{r_0 s^3 t''}{2 R' c''^3}, \\ \mu_{aaa1} &= \frac{1}{3} C' + C' t'^2 - \frac{1}{2} s \sigma + C' t''^2 (\frac{1}{2} c (1 - c) + \frac{1}{2} s^2 t'^2 - s C'' t'') \\ &+ \sigma (s t'^2 C'' + c t') + C' t'' (C'' t' - \frac{1}{2} s) + \frac{3 r_0 s^2 t'' C'}{2 R' c''^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{aaa2} &= C' C'' t''^2 \sigma - \frac{1}{2} s t''^2 \sigma^2 - t' \sigma (\sigma + 2 t'' C') \\ &+ \frac{3 r_0 s t'' C'^2}{2 R' c''^3} + \frac{r_0}{2 R' c''^3} \langle 3 s t' + s^2 t'^2 + c (1 - c) \rangle, \\ \mu_{aaa3} &= -\frac{1}{2} t''^2 C' \sigma^2 + \frac{r_0}{2 R' c''^3} \left(C' C'' t'' + c \sigma - \frac{r_0 s t'}{R' c'} \right) + \frac{r_0 C'^3 t''}{2 R' c''^3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{a\alpha\tau} &= \mu_{a\alpha\tau0} + \lambda' \mu_{a\alpha\tau1} + \lambda'^2 \mu_{a\alpha\tau2}, \\ \mu_{a\alpha\tau0} &= \frac{1}{2} c (1 - c) + \frac{1}{2} s^2 t'^2 + \frac{1}{2} s^2 - \frac{3}{2} s C'' t''^2 (t'' + S'') \\ &- \frac{1}{2} s C'' t''^3 (1 - c) + \frac{1}{2} s^2 t''^3 (t'' + S'') + c t''^2 (1 - c) \\ &+ \frac{r_0}{R' c''^3} \langle s (1 - c)^2 + \frac{1}{2} s^2 t'' (1 - c) \rangle, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \varrho}{d\varphi^2} + \varrho = f(\varrho), \quad (3)$$

wobei das inhomogene Glied $f(\varrho)$ entsprechend der hier angestrebten 3. Näherung bis zu Gliedern, die klein von 3. Ordnung sind, berechnet werden muß

ergeben sich dann die Koeffizienten M_i und N_i zu:

$$\begin{aligned} M_a &= \mu_{a0} + \lambda' \mu_{a1}, \\ \mu_{a0} &= s, \\ \mu_{a1} &= C'; \\ M_\tau &= \mu_{\tau0}, \\ \mu_{\tau0} &= 1 - c; \\ M_{aa} &= \mu_{aa0} + \lambda' \mu_{aa1} + \lambda'^2 \mu_{aa2}, \\ \mu_{aa0} &= \frac{1}{2} \langle c (1 - c) + t''^2 s^2 \rangle, \\ \mu_{aa1} &= C' (t' + t'' C'') + c \sigma, \\ \mu_{aa2} &= -\sigma (\sigma + 2 t'' C') + \frac{r_0 s}{2 R' c''^3}; \\ M_{a\alpha} &= \mu_{a\alpha0} + \lambda' \mu_{a\alpha1}, \\ \mu_{a\alpha0} &= s (1 - c) (1 + t''^2), \\ \mu_{a\alpha1} &= t'' (t'' + S'') C' + s \sigma; \\ M_{\alpha\alpha} &= \mu_{\alpha\alpha0}, \\ \mu_{\alpha\alpha0} &= t'' (t'' + S'') (1 - c) - \frac{1}{2} (t'' + S'')^2; \\ M_{\beta\beta} &= \mu_{\beta\beta0}, \\ \mu_{\beta\beta0} &= -\frac{1}{2} (1 - c); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{a\alpha\tau 1} &= t' \langle t''(t'' + S'') C' + s \sigma \rangle + s t''^2 \sigma (t'' + S'') + (1 - c) t''^2 C'' \sigma \\ &\quad - C' C'' t''^2 (t'' + S'') + \frac{3 r_0 s t'' C'}{R'' c''^3} (1 - c),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{a\alpha\tau 2} &= \frac{1}{2} \sigma (\sigma + 2 C' t'') + C' t''^2 \sigma (t'' + S'') - \frac{1}{2} \sigma^2 t''^2 (1 - c) \\ &\quad + \frac{3 r_0 C'^2 t''}{2 R'' c''^3} (1 - c) + \frac{r_0 s}{2 R' c''^3} \langle (1 - c) (1 + t''^2) - 1 \rangle;\end{aligned}$$

$$M_{a\alpha\tau} = \mu_{a\alpha\tau 0} + \lambda' \mu_{a\alpha\tau 1},$$

$$\mu_{a\alpha\tau 0} = -(t'' + S'') t''^2 \langle C'' (1 - c) + \frac{1}{2} s (t'' + S'') \rangle + \frac{3 r_0 t'' s}{2 R'' c''^3} (1 - c)^2,$$

$$\mu_{a\alpha\tau 1} = \sigma \langle (1 - c) (t'' + S'') t''^2 - s \rangle - C' t'' (t'' + S'')$$

$$\cdot \langle 1 + \frac{1}{2} t'' (t'' + S'') \rangle + \frac{3}{2} \frac{r_0}{R'' c''^3} C' t'' (1 - c)^2;$$

$$M_{\alpha\tau\tau} = \mu_{\alpha\tau\tau 0},$$

$$\mu_{\alpha\tau\tau 0} = \frac{1}{2} (t'' + S'')^2 \langle 1 - (1 - c) t''^2 \rangle - (t'' + S'') (1 - c) t'' + \frac{r_0 t''}{2 R'' c''^3} (1 - c)^3;$$

$$M_{a\beta\beta} = \mu_{a\beta\beta 0} + \lambda' \mu_{a\beta\beta 1},$$

$$\mu_{a\beta\beta 0} = -\frac{1}{2} s (1 - c) (1 + t''^2), \quad \mu_{a\beta\beta 1} = -\frac{1}{2} s \sigma - \frac{1}{2} C' t'' (t'' + S'');$$

$$M_{\tau\beta\beta} = \mu_{\tau\beta\beta 0},$$

$$\mu_{\tau\beta\beta 0} = \frac{1}{2} (1 - c) \langle C'' - t'' (t'' + S'') \rangle.$$

$$N_a = \nu_{a0} + \lambda' \nu_{a1},$$

$$\nu_{a0} = C'', \quad \nu_{a1} = -\sigma;$$

$$N_\tau = \nu_{\tau 0}, \quad \nu_{\tau 0} = t'' + S'';$$

$$N_{aa} = \nu_{aa0} + \lambda' \nu_{aa1} + \lambda'^2 \nu_{aa2},$$

$$\nu_{aa0} = -\frac{1}{2} (S'' + t'' C''^2) + \frac{r_0 s^2}{2 R'' c''^3},$$

$$\nu_{aa1} = -\sigma (t' - t'' C'') + \frac{r_0 s C'}{R' c''^3},$$

$$\nu_{aa2} = -\frac{1}{2} t'' \sigma^2 + \frac{r_0 C'}{2 R' c''^3} + \frac{r_0 C'^2}{2 R'' c''^3};$$

$$N_{a\tau} = \nu_{a\tau 0} + \lambda' \nu_{a\tau 1},$$

$$\nu_{a\tau 0} = -t'' C'' (t'' + S'') + \frac{r_0 s (1 - c)}{R'' c''^3},$$

$$\nu_{a\tau 1} = -\sigma \langle 1 + t'' (t'' + S'') \rangle + \frac{r_0 C' (1 - c)}{R'' c''^3};$$

$$N_{\tau\tau} = \nu_{\tau\tau 0},$$

$$\nu_{\tau\tau 0} = -\frac{t''}{2} (t'' + S'')^2 - (t'' + S'') + \frac{r_0 (1 - c)^2}{2 R'' c''^3};$$

$$N_{\beta\beta} = \nu_{\beta\beta 0},$$

$$\nu_{\beta\beta 0} = -\frac{1}{2} (t'' + S'');$$

$$N_{aaa} = \nu_{aaa0} + \lambda' \nu_{aaa1} + \lambda'^2 \nu_{aaa2} + \lambda'^3 \nu_{aaa3},$$

$$\nu_{aaa0} = -C''/6 + \frac{1}{2} C'' t'' (S'' + C''^2 t'') + \frac{1}{2} C''^3 + \frac{r_0 s}{2 R'' c''^3} \left(c - s t'' C'' - C''^2 + \frac{r_0 s^2 t''}{R'' c''} \right);$$

$$\nu_{aaa1} = -\sigma \langle 1/3 + \frac{3}{2} C''^2 (1 + t''^2) + t''^2 + t'' \sigma/2 - \frac{1}{2} t' t'' C'' \rangle$$

$$+ \frac{r_0}{R'' c''^3} \langle \frac{3}{2} s^2 t'' \sigma - \frac{3}{2} C' C''^2 + C'^2 + c - \frac{1}{2} c C' \rangle + \frac{3 r_0 s^2 C' t''}{2 R''^2 c''^4};$$

$$\nu_{aaa2} = -\sigma^2 \langle \frac{3}{2} C'' (1 + t''^2) - t' t'' \rangle + \frac{r_0}{2 R' c''^3} (2 t' C'' - \sigma - t'' C''^2)$$

$$- \frac{r_0}{2 R'' c''^3} \left(3 s \sigma^2 + 3 t'' C'' C'^2 - 2 \sigma - 2 C' t'' - 2 C'^2 t' - \frac{r_0 s^2}{R' c''^3} - \frac{3 r_0 s C'^2 t''}{R'' c''} \right);$$

$$\nu_{aaa3} = -\frac{1}{2} \sigma^3 (1 + t''^2) + \frac{r_0 C''}{2 R' c''^3} (t' + t'' \sigma) - \frac{r_0}{2 R'' c''^3} \langle C' \sigma (\sigma - C' t'') - \frac{r_0 s C'}{R' c''^3} - \frac{r_0 C'^3 t''}{R'' c''} \rangle;$$

$$N_{a\alpha\tau} = \nu_{a\alpha\tau 0} + \lambda' \nu_{a\alpha\tau 1} + \lambda'^2 \nu_{a\alpha\tau 2},$$

$$\nu_{a\alpha\tau 0} = (t'' + S'') \langle \frac{3}{2} C''^2 (1 + t''^2) + \frac{1}{2} t'' S'' \rangle + \frac{3 r_0}{2 R'' c''^3}$$

$$\cdot \left\langle \frac{1}{3} (1 - c) - C''^2 (1 - c) - s^2 t'' (t'' + S'') + \frac{r_0 s^2 t''}{R'' c''} (1 - c) \right\rangle,$$

$$\begin{aligned}
v_{a\alpha\tau 1} &= t' \sigma - 3 C'' \sigma (t'' + S'') (1 + t''^2) - C'' t'' \sigma + t' t'' \sigma (t'' + S'') \\
&\quad + \frac{r_0}{R'' c''^3} \left\langle 3 s t'' (1-c) \sigma - 3 C' C'' (t'' + S'') + s + s C' - t' (1-c) \right. \\
&\quad \left. + C' t' (1-c) + \frac{3 r_0 s C' t''}{R'' c''} (1-c) \right\rangle, \\
v_{a\alpha\tau 2} &= \frac{3}{2} \sigma^2 (t'' + S'') (1 + t''^2) + t'' \sigma^2 - \frac{r_0 C'' t''}{2 R' c''^3} (t'' + S'') - \frac{r_0 C''}{2 R' c''^3} + \frac{r_0}{R'' c''^3} \\
&\quad \cdot \left\langle S'^2 (1-c) + C' + \frac{3 C'^2}{2} - \frac{3}{2} \sigma^2 (1-c) - \frac{3}{2} t'' C'^2 (t'' + S'') \right\rangle;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{a\alpha\tau} &= v_{a\alpha\tau 0} + \lambda' v_{a\alpha\tau 1}, \\
v_{a\alpha\tau 0} &= C'' \langle t'' + \frac{3}{2} (t'' + S'') (1 + t''^2) \rangle (t'' + S'') \\
&\quad + \frac{r_0}{R'' c''^3} \left\langle s (1-c)^2 (1 + t''^2) + s [t'' (t'' + S'') (1-c) - (1-c) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (t'' + S'')^2] + \frac{3}{2} (1-c) t'' \left(\frac{r_0 s}{R' c''} (1-c) - C'' (1-c) - 2 s (t'' + S'') \right) \right\rangle, \\
v_{a\alpha\tau 1} &= -\sigma \langle 1 + 2 t'' (t'' + S'') + \frac{3}{2} (t'' + S'')^2 (1 + t''^2) \rangle \\
&\quad + \frac{r_0}{R'' c''^3} \left\langle C' [t'' (t'' + S'') (1-c) - \frac{1}{2} (t'' + S'')^2 - (1-c)] \right. \\
&\quad \left. + t'' (t'' + S'') C' (1-c) + s \sigma (1-c) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} (1-c) t'' \left[\sigma (1-c) + \frac{r_0 C'}{R' c''} (1-c) - 2 C' (t'' + S'') \right] \right\rangle;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\tau\tau\tau} &= v_{\tau\tau\tau 0}, \\
v_{\tau\tau\tau 0} &= (t'' + S'') \langle 1 + t'' (t'' + S'') + \frac{1}{2} (1 + t''^2) (t'' + S'')^2 \rangle \\
&\quad + \frac{r_0}{2 R'' c''^3} (1-c) \left\langle - (t'' + S'')^2 - (1-c) + \frac{r_0 t''}{R' c''} (1-c)^2 - t'' (1-c) (t'' + S'') \right\rangle;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{a\beta\beta} &= v_{a\beta\beta 0} + \lambda' v_{a\beta\beta 1}, \\
v_{a\beta\beta 0} &= \frac{1}{2} t'' C'' (t'' + S'') - \frac{r_0 s}{2 R'' c''^3} (1-c), \\
v_{a\beta\beta 1} &= -\frac{1}{2} \sigma \langle 1 + t'' (t'' + S'') \rangle - \frac{r_0 C'}{2 R' c''^3} (1-c);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\tau\beta\beta} &= v_{\tau\beta\beta 0}, \\
v_{\tau\beta\beta 0} &= \frac{1}{2} (t'' + S'') \langle 1 + (1-c) t''^2 \rangle + \frac{1}{2} (1-c) (1 + C'') t'' - \frac{r_0}{2 R'' c''^3} (1-c)^2.
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man die endliche Eintrittsspaltbreite $2 u r_0$, so ergeben sich weitere Koeffizienten, die sich als Funktion der eben berechneten darstellen lassen:

$$\begin{aligned}
M_u &= \mu_{u0}, & M_{uu} &= \mu_{uu0}, & \mu_{uu0} &= \mu_{ua2}; \\
&\quad \mu_{u0} = \mu_{a1}; & & & & \\
M_{au} &= \mu_{au0} + \lambda' \mu_{au1}, & M_{aa\tau} &= \mu_{aa\tau 0} + \lambda' \mu_{aa\tau 1} + \lambda'^2 \mu_{aa\tau 2}, & \mu_{aa\tau 0} &= \mu_{aaa1} - \frac{1}{3} \mu_{a1}, \\
&\quad \mu_{au0} = \mu_{aa1}, & & & & \\
&\quad \mu_{au1} = 2 \mu_{aa2}; & & & & \\
M_{\tau 0} &= \mu_{\tau u 0}, & M_{a\tau u} &= \mu_{a\tau u 0} + \lambda' \mu_{a\tau u 1}, & \mu_{a\tau u 0} &= \mu_{aa\tau 1}, \\
&\quad \mu_{\tau u 0} = \mu_{a\tau 1}, & & & & \\
M_{a\tau u} &= \mu_{a\tau u 0} + \lambda' \mu_{a\tau u 1}, & M_{\tau\tau u} &= \mu_{\tau\tau u 0}, & \mu_{\tau\tau u 0} &= \mu_{a\tau\tau 1}; \\
&\quad \mu_{a\tau u 0} = \mu_{aaa2}, & & & & \\
&\quad \mu_{a\tau u 1} = 3 \mu_{aaa3}; & & & & \\
M_{\tau u u} &= \mu_{\tau u u 0}, & M_{\beta\beta u} &= \mu_{\beta\beta u 0}, & \mu_{\beta\beta u 0} &= \mu_{a\beta\beta 1}; \\
&\quad \mu_{\tau u u 0} = \mu_{aa\tau 2}; & & & & \\
& & M_{uuu} &= \mu_{uuu0}, & \mu_{uuu0} &= \mu_{aaa3}.
\end{aligned}$$

Substituiert man die Impulsabweichung τ durch die in der Praxis vorteilhafteren Größen γ und δ , so ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 M_\gamma &= \frac{1}{2} M_\tau, \\
 M_\delta &= \frac{1}{2} M_\tau, \\
 M_{\gamma\delta} &= \frac{1}{4} M_\tau + \frac{1}{2} M_{\tau\tau}, \\
 M_{\gamma\gamma} &= \frac{1}{4} M_{\tau\tau} - \frac{1}{8} M_\tau, \\
 M_{\delta\delta} &= \frac{1}{4} M_{\tau\tau} - \frac{1}{8} M_\tau, \\
 M_{\alpha\gamma} &= \frac{1}{2} M_{\alpha\tau}, \\
 M_{\alpha\delta} &= \frac{1}{2} M_{\alpha\tau}, \\
 M_{\gamma u} &= \frac{1}{2} M_{\tau u}, \\
 M_{\delta u} &= \frac{1}{2} M_{\tau u}; \\
 M_{\gamma\gamma\gamma} &= \frac{1}{8} (\frac{1}{2} M_\tau - M_{\tau\tau} + M_{\tau\tau\tau}), \\
 M_{\alpha\gamma\gamma} &= \frac{1}{4} (M_{\alpha\tau\tau} - \frac{1}{2} M_{\alpha\tau}), \\
 M_{\gamma\gamma\delta} &= \frac{1}{8} (M_{\tau\tau} - \frac{1}{2} M_\tau + \frac{3}{8} M_{\tau\tau\tau}), \\
 M_{\gamma\gamma u} &= \frac{1}{4} (M_{\tau\tau u} - \frac{1}{2} M_{\tau u});
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\alpha\gamma} &= \frac{1}{2} M_{\alpha\alpha\tau}, \\
 M_{\delta\delta\gamma} &= \frac{1}{8} (M_{\tau\tau} - \frac{1}{2} M_\tau + \frac{3}{8} M_{\tau\tau\tau}), \\
 M_{\gamma\tau u} &= \frac{1}{2} M_{\tau\tau u}, \\
 M_{\beta\beta\gamma} &= \frac{1}{2} M_{\tau\beta\beta}, \\
 M_{\delta\delta\delta} &= \frac{1}{8} (\frac{1}{2} M_\tau - M_{\tau\tau} + M_{\tau\tau\tau}), \\
 M_{\alpha\alpha\delta} &= \frac{1}{4} (M_{\alpha\tau\tau} - M_{\alpha\tau}), \\
 M_{\delta\delta\tau u} &= \frac{1}{4} (M_{\tau\tau u} - \frac{1}{2} M_{\tau u}), \\
 M_{\alpha\alpha\delta} &= \frac{1}{2} M_{\alpha\alpha\tau}, \\
 M_{\delta\delta\tau u} &= \frac{1}{2} M_{\tau\tau u}, \\
 M_{\beta\beta\delta} &= \frac{1}{2} M_{\tau\beta\beta}; \\
 M_{\alpha\gamma\delta} &= \frac{1}{2} (M_{\alpha\tau\tau} + \frac{1}{2} M_{\alpha\tau}), \\
 M_{\alpha\gamma u} &= \frac{1}{2} M_{\alpha\tau u}, \\
 M_{\gamma\delta u} &= \frac{1}{2} (M_{\tau\tau u} + \frac{1}{2} M_{\tau u}), \\
 M_{\alpha\delta u} &= \frac{1}{2} M_{\alpha\tau u}.
 \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten N_i gelten ganz analoge Beziehungen. Sie werden nicht explizit dargestellt, da man nur M mit N , bzw. μ mit ν zu vertauschen braucht. Die Koeffizienten für $i = \alpha\tau^2$ und $i = \tau^3$ hat LIEBL¹³ bestimmt, um die Richtungs- und Energiefokussierungskurven bei doppelfokussierenden Massenspektrographen in 2. Näherung berechnen zu können.

Die Bildfehlerkoeffizienten 3. Ordnung für das homogene Magnetfeld sind damit bestimmt. Es ergeben sich für die M_i und N_i jeweils 24 Koeffizienten neu, nämlich für $i = \alpha\alpha\alpha, \gamma\gamma\gamma, \delta\delta\delta, \text{uuu}, \alpha\alpha\gamma, \alpha\alpha\delta, \alpha\alpha u, \alpha\beta\beta, \alpha\gamma\gamma, \alpha\delta\delta, \alpha u, \beta\beta\gamma, \beta\beta\delta, \beta\beta u, \gamma\gamma\delta, \gamma\gamma u, \gamma\delta\delta, \gamma u, \delta\delta u, \delta u, \alpha\gamma\delta, \alpha\gamma u, \gamma\delta u, \alpha\delta u$.

Da das homogene Feld axial nicht ablenkt, treten keine Koeffizienten mit v auf.

2. Richtungsfokussierung 3. Näherung

Wenn an der Stelle $x'' = l''$ das „Bild“ entstehen soll, so ergibt sich für y'' nach Gl. (2):

$$y'' = r_0 \sum_i B_i i \quad (4)$$

mit $B_i = M_i + \frac{l''}{r_0} N_i$.

Die Bedingung für Richtungsfokussierung 3. Näherung lautet dann:

$$B_\alpha = 0, \quad B_{\alpha\alpha} = 0, \quad B_{\alpha\alpha\alpha} = 0. \quad (5)$$

¹³ H. LIEBL, Optik 16, 108 [1959].

Für den Fall, daß man den radialen Bildfehler axialer Herkunft noch mitkorrigiert, kommt zu den Bedingungsgleichungen (5) noch die weitere Forderung: $B_{\beta\beta} = 0$. Es läßt sich aber dann allgemein zeigen, daß Lösungen nur für große Ablenkinkel Φ möglich sind, abhängig von der Wahl von ε' und ε'' . So gilt für $\varepsilon' = \varepsilon'' = 0$ die Einschränkung $\Phi > 180^\circ$. Für $\varepsilon' = \varepsilon'' = -45^\circ$ muß immer noch gelten:

$$\Phi > 90^\circ.$$

Für beide Fälle (ohne und mit der Bedingung $B_{\beta\beta} = 0$) wurden mit einer elektronischen Rechenanlage Beispiele gerechnet. Einige Ergebnisse sind in Tab. 1 und Tab. 2 ausgewählt. k' bzw. k'' bedeuten die relativen Krümmungen ($k = r_0/R$) von Ein- und Austrittsfeldgrenze. Die die Bündelöffnung betreffenden Bildfehlerkoeffizienten $B_{\beta\beta}$ und $B_{\alpha\beta\beta}$ wurden mitberechnet.

3. Die Streufeldeinflüsse

Die rechnerische Erfassung der Streufeldeinflüsse gelingt nur, wenn Eisenblenden vor und nach dem Feld die Ausdehnung des Streufeldes soweit begrenzen, daß, verglichen mit dem Hauptablenkradius r_0 , der Streufeldbereich als klein betrachtet werden kann (Abb. 3 und 4). In diesem Fall lassen sich die Bedingungsgleichungen für den Bereich des Streufeldes näherungsweise lösen, wenn eine bekannte Streufeldverteilung als Funktion des Ortes angegeben werden kann.

Nr.	Φ	ϵ'	ϵ''	$\frac{l'}{r_0}$	$\frac{l''}{r_0}$	k'	k''	$B_{\beta\beta}$	$B_{\alpha\beta\beta}$
1	60	0	0	1,0	3,732	-1,349	0,941	-1,866	-2,526
2	90	0	0	1,0	1,000	1,449	0,550	-1,000	-1,775
3	100	0	0	1,0	0,700	1,538	1,904	-0,931	-2,175
4	100	0	-45	1,0	0,411	1,258	-1,363	-0,548	-0,706
5	110	0	-45	1,0	0,318	1,705	-0,663	-0,607	-1,174
6	90	5	-45	1,0	0,521	-0,253	-0,357	-0,500	-1,586
7	100	5	-45	1,0	0,433	1,266	-1,312	-0,546	-0,817
8	90	5	-45	1,0	0,521	0,732	-1,264	-0,500	-0,895
9	110	5	-45	1,0	0,341	1,760	-0,797	-0,602	-1,143
10	90	10	-45	1,0	0,540	0,645	-1,206	-0,500	-1,130
11	100	10	-45	1,0	0,453	1,254	-1,285	-0,544	-0,710
12	110	10	-45	1,0	0,362	1,792	-0,926	-0,598	-1,206
13	90	-5	-45	1,0	0,477	-0,323	0,459	-0,500	-2,010
14	90	-5	-45	1,0	0,477	0,822	-1,447	-0,500	-0,617
15	100	-5	-45	1,0	0,388	1,231	-1,464	-0,550	-0,525
16	110	-5	-45	1,0	0,291	1,626	-0,561	-0,612	-1,151
17	90	-10	-45	1,0	0,451	0,839	-1,620	-0,500	-0,382
18	100	-10	-45	1,0	0,361	1,187	-1,679	-0,552	-0,217
19	110	-10	-45	1,0	0,261	1,521	-0,635	-0,618	-1,021

Tab. 1. Numerische Beispiele für die Fokussierungsbedingung $B_a = B_{aa} = B_{aaa} = 0$.

Nr.	Φ	ϵ'	ϵ''	$\frac{l'}{r_0}$	$\frac{l''}{r_0}$	k'	k''	$B_{\alpha\beta\beta}$
1	230	-10	0	1,556	2,144	-0,413	-0,378	0,535
2	230	-10	0	1,556	2,144	-0,840	-0,825	-0,690
3	230	-10	-10	1,556	1,556	-0,552	-0,552	0,313
4	230	-10	-10	1,556	1,556	-0,725	-0,725	-0,478

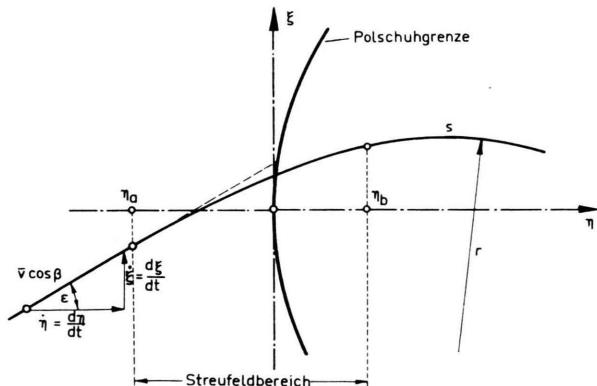
Tab. 2. Numerische Beispiele für die Fokussierungsbedingung $B_a = B_{aa} = B_{aaa} = B_{\beta\beta} = 0$.

Abb. 3. Radialer Strahlverlauf mit Streufeld.

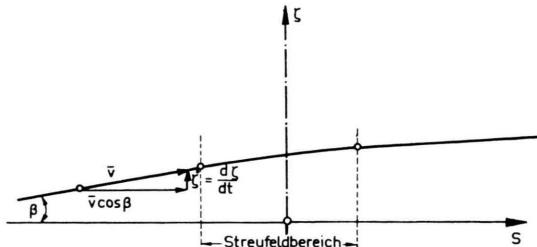


Abb. 4. Axialer Strahlverlauf mit Streufeld.

Das Koordinatensystem ξ, η, ζ ist nun nicht am ankommenden Strahl, sondern an der Polschuhgrenze derart orientiert, daß die η -Achse senkrecht auf ihr steht (die $\xi - \eta$ -Ebene ist Mittelebene). Es werden hier nur die Einflüsse an einer Feldgrenze (der Eintrittsseite) studiert. Die Ergebnisse lassen sich sofort auf die Austrittsseite übertragen. Die entsprechenden Parameter ϵ, R usw. werden daher ohne Indizes bzw. Striche geschrieben.

3.1. Die Feldverteilung

Abb. 5 zeigt qualitativ dargestellt den relativen Streufeldabfall mit (Kurve 1) und ohne (Kurve 2) Eisenblende, gemessen längs der η -Achse. Für $\eta > \eta_b$

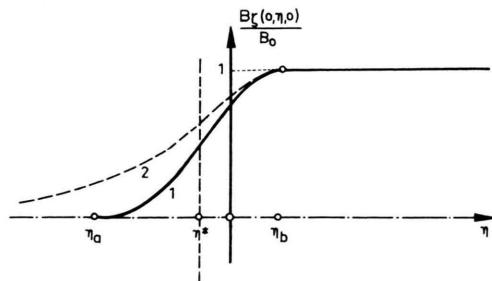


Abb. 5. Streufeldverlauf mit (1) und ohne (2) Blende.

ist das Feld homogen. Durch die Blende erhält das Streufeld eine definierte Ausdehnung, so daß für $\eta < \eta_a$ $B_\zeta(0, \eta, 0) = 0$ ist und $|\eta_b - \eta_a| \ll r_0$. Die Komponenten der Feldstärke im Streufeldbereich in einem beliebigen, aber nahe der η -Achse befindlichen Punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$ als Funktion der experimentell ge-

messenen Feldverteilung $B_\zeta(0, \eta, 0)$ und deren Ableitungen, erhält man dann durch eine geeignete TAYLOR-Entwicklung unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften des Feldes und der für das Magnetfeld gültigen Beziehungen $\text{rot } \mathbf{B} = 0$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$ und $\Delta \mathbf{B} = 0$ bzw. $\Delta B_\xi = \Delta B_\eta = \Delta B_\zeta = 0$ zu:

$$\begin{aligned} B_\xi(\xi, \eta, \zeta) = & -\frac{\xi \zeta}{R} \frac{\partial B}{\partial \eta} + \frac{\xi \zeta^3}{6 R} \frac{\partial^3 B}{\partial \eta^3} - \frac{\xi \eta \zeta}{R^2} \frac{\partial B}{\partial \eta} + \frac{\xi^3 \zeta}{2 R^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} + \frac{\xi \eta \zeta^3}{6 R^2} \frac{\partial^3 B}{\partial \eta^3} - \frac{\xi \zeta^3}{6 R^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} \\ & - \frac{\xi^3 \zeta^3}{12 R^2} \frac{\partial^4 B}{\partial \eta^4} - \frac{\xi \zeta^5}{120 R} \frac{\partial^5 B}{\partial \eta^5} + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} B_\eta(\xi, \eta, \zeta) = & \zeta \frac{\partial B}{\partial \eta} - \frac{1}{6} \zeta^3 \frac{\partial^3 B}{\partial \eta^3} - \frac{\xi^2 \zeta}{2 R} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} + \frac{\zeta^3}{6 R} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} + \frac{\xi^2 \zeta^3}{12 R} \frac{\partial^4 B}{\partial \eta^4} + \frac{\zeta^5}{120} \frac{\partial^5 B}{\partial \eta^5} - \frac{\xi^2 \zeta}{2 R^2} \frac{\partial B}{\partial \eta} \\ & - \frac{\xi^2 \eta \zeta}{2 R^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} - \frac{\zeta^5}{60 R} \frac{\partial^4 B}{\partial \eta^4} + \frac{\eta \zeta^3}{6 R^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} + \frac{\zeta^3}{6 R^2} \frac{\partial B}{\partial \eta} + \frac{\xi^4 \zeta}{8 R^2} \frac{\partial^3 B}{\partial \eta^3} \\ & + \frac{\xi^2 \eta \zeta^3}{12 R^2} \frac{\partial^4 B}{\partial \eta^4} - \frac{\xi^2 \zeta^5}{240 R} \frac{\partial^6 B}{\partial \eta^6} - \frac{\zeta^7}{5040} \frac{\partial^7 B}{\partial \eta^7} + \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} B_\zeta(\xi, \eta, \zeta) = & B - \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} - \frac{\xi^2}{2 R} \frac{\partial B}{\partial \eta} + \frac{\zeta^2}{2 R} \frac{\partial B}{\partial \eta} + \frac{\xi^2 \zeta^2}{4 R} \frac{\partial^3 B}{\partial \eta^3} + \frac{\zeta^4}{24} \frac{\partial^4 B}{\partial \eta^4} - \frac{\zeta^4}{12 R} \frac{\partial^3 B}{\partial \eta^3} \\ & - \frac{\xi^2 \eta}{2 R^2} \frac{\partial B}{\partial \eta} + \frac{\xi^4}{8 R^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} + \frac{\eta \zeta^2}{2 R^2} \frac{\partial B}{\partial \eta} + \frac{\xi^2 \eta \zeta^2}{4 R^2} \frac{\partial^3 B}{\partial \eta^3} - \frac{\xi^2 \zeta^2}{4 R^2} \frac{\partial^2 B}{\partial \eta^2} \\ & - \frac{\eta \zeta^4}{12 R^2} \frac{\partial^3 B}{\partial \eta^3} - \frac{\xi^4 \zeta^2}{16 R^2} \frac{\partial^4 B}{\partial \eta^4} - \frac{\xi^2 \zeta^4}{48 R} \frac{\partial^5 B}{\partial \eta^5} - \frac{\zeta^6}{720} \frac{\partial^6 B}{\partial \eta^6} + \frac{\zeta^6}{240 R} \frac{\partial^5 B}{\partial \eta^5} + \dots. \end{aligned} \quad (6)$$

Zur Abkürzung wurde in den Formeln (6) B statt $B_\zeta(0, \eta, 0)$ geschrieben. Dies gilt auch für alle folgenden Ausdrücke. Bei der Beantwortung der Frage, bis zu welcher Ableitung man die TAYLOR-Entwicklung anschreiben muß, ist zu beachten, daß die Ableitungen $\partial^n B / \partial \eta^n$ der Streufeldverteilung große Werte annehmen kann, da der Bereich, in dem sich die Funktion B/B_0 von 0 auf 1 ändert, als klein betrachtet werden muß.

3.2. Die Bewegungsgleichungen

Schreibt man die LORENTZsche Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen in einem Magnetfeld in Komponentenform, so erhält man ein System von 3 gekoppelten Differentialgleichungen 2. Ordnung. Integration nach der Zeit mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (zur Zeit $t = t_a$ passiert das Teilchen die Stelle $\eta = \eta_a$ mit den Geschwindigkeitskomponenten $\dot{\xi} = \dot{\xi}_a$ und $\dot{\zeta} = \dot{\zeta}_a$) führt zu folgenden Gleichungen:

$$\dot{\xi}(t) = \dot{\xi}_a + q \int_{t_a}^t (\dot{\zeta} B_\eta - \dot{\eta} B_\zeta) dt, \quad \dot{\zeta}(t) = \dot{\zeta}_a + q \int_{t_a}^t (\eta B_\xi - \dot{\xi} B_\eta) dt \quad (7, 8)$$

mit $q = e e_0/m$. Eliminiert man die Zeit unter Beachtung, daß $\dot{\xi} = \bar{v} \cos \beta \sin \varepsilon$ und $\dot{\zeta} = \bar{v} \sin \beta$ ist (s. Abb. 3 und 4), so erhält man die Gleichungen:

$$\sin \varepsilon(\eta) = \frac{\cos \beta_a}{\cos \beta} \sin \varepsilon_a + \frac{q}{\cos \beta} \int_{\eta_a}^{\eta} \left(B_\eta \frac{\tan \beta}{\cos \varepsilon} - B_\zeta \right) d\eta, \quad (9)$$

$$\sin \beta(\eta) = \sin \beta_a + \bar{q} \int_{\eta_a}^{\eta} (B_\xi - B_\eta \tan \varepsilon) d\eta \quad (10)$$

$$\text{mit } \sin \varepsilon_a = \frac{\dot{\xi}_a}{\bar{v} \cos \beta_a}; \quad \sin \beta_a = \frac{\dot{\zeta}_a}{\bar{v}}; \quad \bar{q} = \frac{q}{\bar{v}}.$$

$\beta(\eta)$ und $\varepsilon(\eta)$ sind die Neigungswinkel der Bahn bzw. der Projektion der Bahntangente in die Mittelebene in jedem Punkt ξ, η, ζ gegen die Mittelebene bzw. die η -Achse. Für die Bahngleichung gelten die Ausdrücke:

$$\xi(\eta) = \xi_a + \int_{\eta_a}^{\eta} \tan \varepsilon \, d\eta, \quad \zeta(\eta) = \zeta_a + \int_{\eta_a}^{\eta} \frac{\tan \beta}{\cos \varepsilon} \, d\eta. \quad (11, 12)$$

Durch trigonometrische Umformung der Gln. (9) und (10) lassen sich für $\tan \varepsilon$ und $\tan \beta/\cos \varepsilon$ die benötigten Ausdrücke gewinnen.

3.3. Lösung 1. Näherung und Ersatzfeldgrenze

Mit Hilfe der Gln. (9) – (12) lassen sich Ort und Bewegungsrichtung eines Ions im Streufeldbereich angeben. Betrachten wir die Bahn eines Ions einmal für eine reale Streufeldverteilung (wobei nur Terme, die klein von 1. Ordnung sind, berücksichtigt werden) nach Gl. (6) und zum anderen für ein Feld mit $B_\xi = B_\eta = 0$, $B_\zeta = B_0$ für $\eta \geq 0$ und $B_\zeta = 0$ für $\eta < 0$ (scharf angeschnittenes Idealfeld), so wird ε an der Stelle $\eta = \eta_b$ für beide Fälle verschiedene Werte haben. Erweitert man nun den Bereich des homogenen Feldes von der Stelle $\eta = 0$ bis zu einer Stelle $\eta = \eta^*$, so sind für beide Fälle bei $\eta = \eta_b$ die Werte von ε in 1. Näherung einander gleich, wenn man η^* wie folgt wählt:

$$\eta^* = \eta_b - \int_{\eta_a}^{\eta_b} \frac{B_0}{B} \, d\eta. \quad (13)$$

Mit Gl. (13) ist die Definition einer „Ersatzfeldgrenze“ gegeben^{5, 7}.

Abb. 6 zeigt nun den Strahlengang im wirklichen Feld (Strahl 1) und im Ersatzfeld (Strahl 2 und 3).

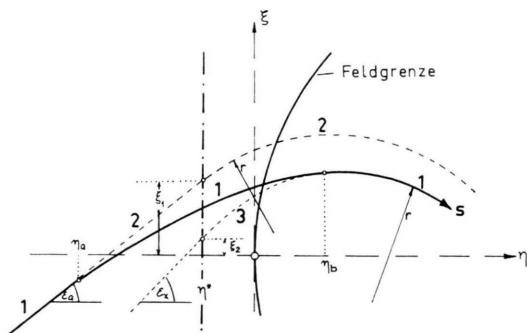


Abb. 6. Zum Strahlengang im wirklichen Feld (Strahl 1) und im Ersatzfeld (Strahl 2 und 3).

Strahl 1 hat zwischen η_a und η_b eine von Null stetig wachsende Krümmung, die für $\eta \geq \eta_b$ in die konstante Krümmung $1/r$ übergeht. Strahl 2 verläuft geradlinig (mit Steigung $\tan \varepsilon_a$) bis zur Ersatz-

feldgrenze η^* (Schnittpunkt ξ_1) und von da ab mit konstanter Krümmung $1/r$. Extrapoliert man den Strahl 1 im Ersatzfeld mit der konstanten Krümmung $1/r$ rückwärts bis zur Stelle $\eta = \eta^*$ (Strahl 3), so trifft er die Ersatzfeldgrenze bei der Koordinate ξ_2 . Die Rechnung ergibt, daß die Differenz $\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1$ in 1. Näherung gleich Null ist.

Im Gegensatz zum homogenen Feld erfährt ein Ionenstrahl im Streufeld auch eine axiale Ablenkung. Da bei der Definition der Ersatzfeldgrenze nur Unterschiede im Winkel ε von Strahl 1 und Strahl 2 betrachtet wurden, wird der entsprechende Unterschied $\Delta\beta$ im axialen Winkel an der Stelle η_b nicht Null sein. Es ergibt sich:

$$\Delta\beta = - \frac{\zeta_1 \tan \varepsilon_a}{r_0} + \dots,$$

wobei ζ_1 und ζ_2 die äquivalenten axialen Größen zu ξ_1 und ξ_2 darstellen^{3, 6}. Für $\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1$ ergibt sich in 1. Näherung ebenfalls Null.

3.4. Lösung 2. und 3. Näherung

Durch die Definition der Ersatzfeldgrenze wird zwar der Winkelunterschied $\Delta\varepsilon$ in 1. Näherung zu Null, nicht aber notwendig auch die Größen $\Delta\beta$, $\Delta\xi$, $\Delta\zeta$. In 2. und 3. Näherung ist auch $\Delta\varepsilon$ von Null verschieden. Berechnet man $\Delta\varepsilon$ für die Strahlen 2 und 3 einmal an der Stelle $\eta = \eta_b$ und dann an der Ersatzfeldgrenze η^* ($\Delta\varepsilon = \varepsilon_x - \varepsilon_a$), so sind beide Ergebnisse erst in 3. Näherung voneinander verschieden. Bei den unten angegebenen Formeln handelt es sich um den Winkelunterschied $\Delta\varepsilon = \varepsilon_x - \varepsilon_a$ an der Ersatzfeldgrenze. Die axiale Winkeländerung $\Delta\beta$ ist jedoch sowohl bei $\eta = \eta_b$ und bei $\eta = \eta^*$ exakt gleich.

Die Näherungsrechnung [approximatives Lösungsverfahren für die Gln. (9) – (12)] ergibt für die Größen $\Delta\varepsilon$, $\Delta\beta$, $\Delta\xi$, $\Delta\zeta$ folgende Ausdrücke, wobei zur Abkürzung B' für $\partial B / \partial \eta$, B'' für $\partial^2 B / \partial \eta^2$ usw. steht und die Integrationsgrenzen η_a und η_b der bestimmten Integrale einfach durch a und b ersetzt wurden:

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon = & \frac{\xi_1^2}{2 R r_0 \cos \varepsilon_a} - \frac{\xi_1^2}{2 R r_0 \cos^3 \varepsilon_a} + \frac{\tan^2 \varepsilon_a}{2 R r_0 B_0 \cos \varepsilon_a} \int_a^b (\eta - \eta^*)^2 B' d\eta - \frac{\xi_1 \tan \beta_a \tan^2 \varepsilon_a}{r_0} + \frac{\xi_1^2 \tan^3 \varepsilon_a}{2 r_0^2} \\
& - \left\langle \frac{\xi_1^2}{4 R r_0 \cos \varepsilon_a} - \frac{\xi_1^2}{4 R r_0 \cos^3 \varepsilon_a} + \frac{\tan^2 \varepsilon_a}{4 R r_0 B_0 \cos \varepsilon_a} \int_a^b (\eta - \eta^*)^2 B' d\eta - \frac{\xi_1 \tan \beta_a \tan^2 \varepsilon_a}{2 r_0} + \frac{\xi_1^2 \tan^3 \varepsilon_a}{2 r_0^2} \right\rangle \langle \gamma + \delta \rangle \\
& + \frac{1}{r_0 B_0} \left\{ \left\langle \frac{\xi_1 \xi_1^2 (1+4 \tan^2 \varepsilon_a)}{2 R r_0 \cos^2 \varepsilon_a} - \frac{2 \xi_1 \xi_1 \tan \beta_a \tan \varepsilon_a}{R \cos^3 \varepsilon_a} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\xi_1^2 \eta_b}{2 R^2 \cos \varepsilon_a} + \frac{\xi_1^3 \tan \varepsilon_a}{2 R^2 \cos \varepsilon_a} - \frac{\xi_1^2 \eta_b}{2 R^2 \cos^3 \varepsilon_a} - \frac{3 \xi_1 \xi_1^2 \tan \varepsilon_a}{2 R^2 \cos^3 \varepsilon_a} \right\rangle B_0 \right. \\
& \left. + \left\langle \frac{\xi_1^2}{2 R^2 \cos^3 \varepsilon_a} - \frac{\xi_1^2}{2 R^2 \cos \varepsilon_a} + \frac{\xi_1^2 (5+6 \tan^2 \varepsilon_a) \tan \varepsilon_a}{2 R r_0 \cos^2 \varepsilon_a} + \frac{2 \xi_1 \tan \beta_a \tan \varepsilon_a}{r_0 \cos^3 \varepsilon_a} - \frac{\tan^2 \beta_a}{2 \cos \varepsilon_a} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\xi_1^2 \tan^2 \varepsilon_a (3+4 \tan^2 \varepsilon_a)}{2 r_0^2 \cos \varepsilon_a} \right\rangle \int_a^b B d\eta + \left\langle \frac{\xi_1^2 \tan^2 \varepsilon_a (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{r_0^2 B_0 \cos \varepsilon_a} - \frac{\xi_1 \tan \beta_a \tan \varepsilon_a (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{r_0 B_0 \cos \varepsilon_a} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\xi_1^2 \tan \varepsilon_a (5+6 \tan^2 \varepsilon_a)}{2 R r_0 B_0 \cos^2 \varepsilon_a} \right\rangle \int_a^b B^2 d\eta + \left\langle \frac{\xi_1 \tan \varepsilon_a (2+3 \tan^2 \varepsilon_a)}{2 R^2 \cos \varepsilon_a} - \frac{\xi_1}{2 R r_0 \cos^4 \varepsilon_a} \right\rangle \int_a^b (\eta - \eta^*)^2 B' d\eta \right. \\
& \left. + \frac{\tan \varepsilon_a}{2 R r_0 B_0 \cos^4 \varepsilon_a} \left(\int_a^b B d\eta \right)^3 - \frac{3 \tan \varepsilon_a}{2 R r_0 B_0 \cos^4 \varepsilon_a} \int_a^b \left(\int_a^b B d\eta \right)^2 d\eta \right. \\
& \left. + \left\langle \frac{\xi_1^3 \tan \beta_a \tan \varepsilon_a (5+\tan^2 \varepsilon_a)}{6 r_0 B_0 \cos \varepsilon_a} - \frac{\xi_1^4 \tan \varepsilon_a (5+\tan^2 \varepsilon_a)}{8 R r_0 B_0 \cos^2 \varepsilon_a} + \frac{2 \xi_1^4 \tan^2 \varepsilon_a (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{3 r_0^2 B_0 \cos \varepsilon_a} \right\rangle \int_a^b B'^2 d\eta \right. \\
& \left. - \frac{\xi_1^4 (1+22 \tan^2 \varepsilon_a)}{12 r_0^2 B_0^2 \cos^3 \varepsilon_a} \int_a^b B B'^2 d\eta + \left\langle \frac{\xi_1^5 \tan \beta_a \tan \varepsilon_a (1-3 \tan^2 \varepsilon_a)}{30 r_0 B_0 \cos \varepsilon_a} + \frac{2 \xi_1^6 \tan \varepsilon_a (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{15 r_0 B_0 \cos \varepsilon_a} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\xi_1^6 \tan \varepsilon_a}{18 R r_0 B_0 \cos^2 \varepsilon_a} \right\rangle \int_a^b B''^2 d\eta - \frac{\xi_1^6 \tan^2 \varepsilon_a}{6 r_0^2 B_0^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B B''^2 d\eta + \frac{\tan^2 \varepsilon_a}{2 R^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b \eta (\eta - \eta^*)^2 B' d\eta \right. \\
& \left. + \frac{\tan^4 \varepsilon_a}{2 R^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b (\eta - \eta^*)^3 B' d\eta + \dots \text{ Terme 4. Ordnung,} \right. \\
\Delta \beta = & - \frac{\xi_1 \tan \varepsilon_a}{r_0} + \frac{\xi_1 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{r_0^2 B_0 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B d\eta - \frac{\xi_1 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{r_0^2 B_0^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B^2 d\eta - \frac{2 \xi_1^3 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{3 r_0^2 B_0^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B'^2 d\eta \\
& - \frac{2 \xi_1^5 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{15 r_0^2 B_0^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B''^2 d\eta - \frac{\xi_1 \xi_1}{R r_0 \cos^2 \varepsilon_a} + \frac{\xi_1 \tan \varepsilon_a}{2 r_0} \langle \gamma + \delta \rangle - \frac{\xi_1 \tan \varepsilon_a}{8 r_0} \langle 3 \gamma^2 + 2 \gamma \delta + 3 \delta^2 \rangle \\
& - \left\langle \frac{\xi_1 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{r_0^2 B_0 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B d\eta - \frac{\xi_1 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{r_0^2 B_0^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B^2 d\eta - \frac{2 \xi_1^3 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{3 r_0^2 B_0^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B'^2 d\eta - \frac{\xi_1 \xi_1}{2 R r_0 \cos^2 \varepsilon_a} \right. \\
& \left. - \frac{2 \xi_1^5 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{15 r_0^2 B_0^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B''^2 d\eta \right\rangle \langle \gamma + \delta \rangle + \frac{1}{r_0 B_0} \left\{ \frac{\xi_1 \tan^2 \beta_a \tan \varepsilon_a (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{2} - \frac{\xi_1^2 \tan \beta_a \tan^2 \varepsilon_a}{r_0 \cos^2 \varepsilon_a} \right. \\
& \left. - \frac{\xi_1^2 \tan \beta_a}{2 r_0} + \frac{\xi_1^3 \tan \varepsilon_a (2+2 \tan^2 \varepsilon_a + 3 \tan^4 \varepsilon_a)}{9 r_0^2} - \frac{\xi_1 \eta_b \xi_1}{R^2 \cos^2 \varepsilon_a} - \frac{\xi_1^3}{6 R r_0 \cos^3 \varepsilon_a} - \frac{\xi_1^3 \tan^2 \varepsilon_a}{R r_0 \cos^3 \varepsilon_a} \right. \\
& \left. + \frac{3 \xi_1^2 \tan \beta_a \tan \varepsilon_a}{2 R \cos^3 \varepsilon_a} + \frac{\xi_1^3 \tan \varepsilon_a (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{2 R^2} - \frac{3 \xi_1^2 \xi_1 \tan \varepsilon_a}{2 R^2 \cos^2 \varepsilon_a} - \frac{\xi_1^2 \tan \beta_a \tan \varepsilon_a}{2 R \cos \varepsilon_a} \right\rangle B_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\xi_1 \zeta_1 \tan \varepsilon_a (5 + 6 \tan^2 \varepsilon_a)}{R r_0 B_0 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B^2 d\eta + \left\langle \frac{\xi_1 \zeta_1 \tan \varepsilon_a (5 + 6 \tan^2 \varepsilon_a)}{R r_0 \cos \varepsilon_a} + \frac{\xi_1 \zeta_1}{R^2 \cos^2 \varepsilon_a} \right\rangle \int_a^b B d\eta \\
& + \left\langle \frac{\tan \beta_a (1 + 3 \tan^2 \varepsilon_a)}{2 r_0 B_0 \cos^2 \varepsilon_a} - \frac{\zeta_1 \tan \varepsilon_a (3 + 4 \tan^2 \varepsilon_a)}{r_0^2 B_0 \cos^2 \varepsilon_a} - \frac{\zeta_1 (1 + 3 \tan^2 \varepsilon_a)}{2 R r_0 B_0 \cos \varepsilon_a} + \frac{9 \zeta_1 \tan \varepsilon_a}{2 R r_0 B_0 \cos^3 \varepsilon_a} \right. \\
& \left. + \frac{\tan \beta_a \tan \varepsilon_a (2 + 3 \tan^2 \varepsilon_a)}{2 R B_0 \cos \varepsilon_a} + \frac{\zeta_1 \tan \varepsilon_a (2 + 3 \tan^2 \varepsilon_a)}{2 R^2 B_0 \cos^2 \varepsilon_a} \right\rangle \left(\int_a^b B d\eta \right)^2 - \left\langle \frac{\tan \beta_a \tan \varepsilon_a (2 + 3 \tan^2 \varepsilon_a)}{R \cos \varepsilon_a} + \frac{\tan \beta_a \tan \varepsilon_a}{r_0 \cos^2 \varepsilon_a} \right. \\
& \left. + \frac{\zeta_1 \tan^2 \varepsilon_a (2 + 3 \tan^2 \varepsilon_a)}{R r_0 \cos \varepsilon_a} - \frac{\zeta_1}{R r_0 \cos^3 \varepsilon_a} + \frac{\zeta_1 \tan \varepsilon_a (2 + 3 \tan^2 \varepsilon_a)}{R^2 \cos^2 \varepsilon_a} \right\rangle \int_a^b d\eta \int B d\eta \\
& - \left\langle \frac{\zeta_1 \tan \varepsilon_a (1 + 2 \tan^2 \varepsilon_a)}{r_0^2 B_0 \cos^2 \varepsilon_a} + \frac{\tan \beta_a (1 + 2 \tan^2 \varepsilon_a)}{r_0 B_0 \cos^2 \varepsilon_a} + \frac{\zeta_1 \tan^2 \varepsilon_a (5 + 6 \tan^2 \varepsilon_a)}{R r_0 B_0 \cos \varepsilon_a} \right\rangle \int_a^b (\eta - \eta^*) B^2 d\eta \\
& - \frac{2 \xi_1 \zeta_1^3 \tan \varepsilon_a (5 + 6 \tan^2 \varepsilon_a)}{3 R r_0 B_0 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B'^2 d\eta - \frac{\zeta_1^5 \tan \varepsilon_a (7 + 10 \tan^2 \varepsilon_a)}{6 r_0^2 B_0^2 \cos^2 \varepsilon_a} \int_a^b B'^3 d\eta \\
& - \frac{\xi_1 \zeta_1^5 \tan \varepsilon_a (5 + 6 \tan^2 \varepsilon_a)}{12 R r_0 B_0 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B''^2 d\eta + \frac{\zeta_1 \tan \varepsilon_a (7 + 10 \tan^2 \varepsilon_a)}{r_0^2 B_0^2 \cos^2 \varepsilon_a} \int_a^b B^2 d\eta \int B d\eta \\
& - \left\langle \frac{2 \zeta_1^2 \tan \beta_a (1 + 2 \tan^2 \varepsilon_a)}{r_0 B_0 \cos^2 \varepsilon_a} + \frac{2 \zeta_1^3 \tan \varepsilon_a (1 + 2 \tan^2 \varepsilon_a)}{3 r_0^2 B_0 \cos^2 \varepsilon_a} + \frac{2 \zeta_1^3 \tan^2 \varepsilon_a (5 + 6 \tan^2 \varepsilon_a)}{3 R r_0 B_0 \cos \varepsilon_a} \right\rangle \int_a^b (\eta - \eta^*) B'^2 d\eta \\
& - \left\langle \frac{5 \zeta_1^4 \tan \beta_a (1 + 2 \tan^2 \varepsilon_a)}{12 R r_0 B_0 \cos^2 \varepsilon_a} + \frac{\zeta_1^5 \tan^2 \varepsilon_a (5 + 6 \tan^2 \varepsilon_a)}{12 R r_0 B_0 \cos \varepsilon_a} \right\rangle \int_a^b (\eta - \eta^*) B''^2 d\eta - \frac{\zeta_1^7 (1 + 2 \tan^2 \varepsilon_a)}{90 r_0 B_0 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B'''^2 d\eta \\
& + \frac{2 \zeta_1^3 \tan \varepsilon_a (9 + 14 \tan^2 \varepsilon_a)}{3 r_0^2 B_0^2 \cos^2 \varepsilon_a} \int_a^b B'^2 d\eta \int B d\eta + \frac{\zeta_1^5 \tan \varepsilon_a (5 + 8 \tan^2 \varepsilon_a)}{6 r_0^2 B_0^2 \cos^2 \varepsilon_a} \int_a^b B''^2 d\eta \int B d\eta \\
& - \frac{\zeta_1^7 \tan \varepsilon_a (3 + 4 \tan^2 \varepsilon_a)}{9 r_0^2 B_0^2 \cos^2 \varepsilon_a} \int_a^b B' B''^2 d\eta + \frac{\zeta_1^5 \tan \varepsilon_a (1 + 2 \tan^2 \varepsilon_a)}{12 r_0^2 B_0^2 \cos^2 \varepsilon_a} \int_a^b B' d\eta \int d\eta \int B''^2 d\eta \Big\} + \dots
\end{aligned}$$

+ ... Terme 4. Ordnung;

$$\begin{aligned}
\Delta \xi &= \frac{\zeta_1^2}{2 r_0 \cos^3 \varepsilon_a} + \frac{(\eta_b - \eta^*)^2}{2 r_0 \cos^3 \varepsilon_a} - \frac{1}{r_0 B_0 \cos^3 \varepsilon_a} \int_a^b d\eta \int B d\eta - \frac{\zeta_1^2 (\gamma + \delta)}{4 r_0 \cos^3 \varepsilon_a} - \frac{(\eta_b - \eta^*)^2 (\gamma + \delta)}{4 r_0 \cos^3 \varepsilon_a} \\
&+ \frac{\gamma + \delta}{2 r_0 B_0 \cos^3 \varepsilon_a} \int_a^b d\eta \int B d\eta + \frac{\zeta_1^2 \tan \varepsilon_a (5 + 6 \tan^2 \varepsilon_a)}{2 r_0^2 B_0^2 \cos^2 \varepsilon_a} \int_a^b B^2 d\eta + \frac{\xi_1 \zeta_1^2 \tan \varepsilon_a}{R r_0 \cos^3 \varepsilon_a} \\
&+ \frac{\zeta_1^4 \tan \varepsilon_a (7 + 11 \tan^2 \varepsilon_a)}{24 r_0^2 B_0^2 \cos^2 \varepsilon_a} \int_a^b B'^2 d\eta - \frac{\tan \varepsilon_a (\eta_b - \eta^*)^3}{2 r_0^2 \cos^4 \varepsilon_a} - \frac{\zeta_1^2 \tan \varepsilon_a (5 + 6 \tan^2 \varepsilon_a)}{2 r_0^2 \cos^2 \varepsilon_a} (\eta_b - \eta^*) \\
&+ \frac{3 \tan \varepsilon_a}{2 r_0^2 B_0^2 \cos^4 \varepsilon_a} \int_a^b \left(\int B d\eta \right)^2 d\eta + \left(\int_a^b d\eta \int (\eta - \eta^*)^2 B' d\eta - (\eta_b - \eta^*) \int_a^b (\eta - \eta^*)^2 B' d\eta \right) \frac{\tan^2 \varepsilon_a}{2 R r_0 B_0 \cos^3 \varepsilon_a} \\
&+ \frac{\xi_1 \tan \varepsilon_a}{R r_0 B_0 \cos^3 \varepsilon_a} \int_a^b d\eta \int (\eta - \eta^*) B' d\eta + \dots \text{ Terme 4. Ordnung;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta\zeta = \frac{1}{r_0 \cos \varepsilon_a} & \left\{ \frac{\xi_1^2 \zeta_1 \tan \varepsilon_a}{2R} - \frac{\zeta_1^3 \tan \varepsilon_a}{2R \cos^2 \varepsilon_a} + \frac{\zeta_1^3 (1+3 \tan^2 \varepsilon_a)}{6r_0 \cos \varepsilon_a} + \frac{\zeta_1 \tan^3 \varepsilon_a (\eta_b - \eta^*)^2}{2R} + \frac{\tan \beta_a \tan \varepsilon_a (\eta_b - \eta^*)^2}{2r_0 \cos^3 \varepsilon_a} \right. \\
 & - \frac{\zeta_1 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{2r_0 \cos \varepsilon_a} (\eta_b - \eta^*)^2 - \frac{\zeta_1 \tan \varepsilon_a (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{R B_0} \int_a^b (\eta - \eta^*) B \, d\eta + \frac{\zeta_1 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a) (\eta_b - \eta^*)}{r_0 B_0^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B^2 \, d\eta \\
 & + \frac{\zeta_1^2 \tan \beta_a \tan \varepsilon_a}{2 \cos \varepsilon_a} - \frac{\zeta_1 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{r_0 B_0^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b d\eta \int B^2 \, d\eta - \frac{\tan \beta_a \tan \varepsilon_a}{B_0 \cos \varepsilon_a} \int_a^b (\eta - \eta^*) B \, d\eta \\
 & + \frac{\zeta_1 \tan \varepsilon_a}{R B_0 \cos^2 \varepsilon_a} \int_a^b d\eta \int B \, d\eta - \frac{2 \zeta_1^3 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{3r_0 B_0^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b d\eta \int B'^2 \, d\eta + \frac{2 \zeta_1^3 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a) (\eta_b - \eta^*)}{3r_0 B_0^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B'^2 \, d\eta \\
 & \left. - \frac{\zeta_1^5 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a)}{12r_0 B_0^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b d\eta \int B'^2 \, d\eta + \frac{2 \zeta_1^5 (1+2 \tan^2 \varepsilon_a) (\eta_b - \eta^*)}{15r_0 B_0^2 \cos \varepsilon_a} \int_a^b B'^2 \, d\eta \right\} + \dots \text{ Terme 4. Ordnung.}
 \end{aligned}$$

Damit sind die durch das magnetische Streufeld bedingten Ablenkungen in radialer und axialer Richtung bis in 3. Näherung erfaßt. Das von η_a bis η_b reichende Streufeld wird in 1. Näherung durch ein schmales homogenes Zusatzfeld ersetzt, das bis zur Koordinate $\eta = \eta^*$ reicht. Für das so entstehende Ersatzfeld, dessen Feldgrenze in jedem Fall gerade sein soll, auch wenn die Magnetpolshuhe gekrümmmt sind, ergibt sich für den Ionenstrahl bis zur Stelle $\eta = \eta^*$ (Beginn des homogenen Ersatzfeldes) eine geradlinige Bahn mit der Steigung $\tan \varepsilon_a$ bzw. $\tan \beta_a$ (Bahn 2 in Abb. 6). An der Feldgrenze erfolgt dann eine Knickung um $\Delta\varepsilon$ und $\Delta\beta$, sowie eine Verschiebung um $\Delta\xi$ und $\Delta\zeta$. Mit etwas veränderter Richtung und verschoben läuft dann der Strahl im homogenen Feld mit der konstanten Krümmung $1/r$ weiter (Strahl 3 in Abb. 6), bis er bei η_b in die „wirkliche“ Bahn (Strahl 1) einmündet.

4. Numerische Beispiele für die Streufeldeffekte

Eine von KUNZE¹⁴ an einem Modellmagneten gemessene Streufeldverteilung mit Eisenblende wurde zugrunde gelegt, um für einen Spezialfall abzuschätzen, wie groß die Ablenkungen und Versetzungen von Ionenstrahlen sind, wenn sie das Streufeld passieren und wie groß die Effekte 3. Ordnung im Vergleich zu denen 2. Ordnung sind.

Abb. 7 zeigt die gemessene Streufeldverteilung. Bei $\eta = 0$ ist die Polshuhkante, die Blende befand sich 5 mm davor, der Polshuhabstand betrug etwa 2 cm. Der Feldanstieg erstreckte sich dann von un-

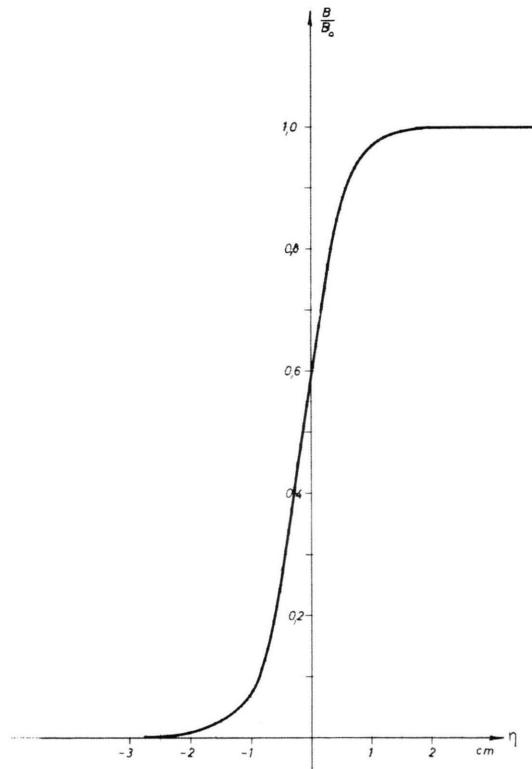


Abb. 7.

gefähr $\eta_a = -2,75$ cm bis $\eta_b = +1,75$ cm. Alle in den Formeln vorkommenden Integrale wurden numerisch ausgewertet. Für $\int_a^b (B/B_0) \, d\eta$ ergab sich 1,88 cm, d. h. man erhält für η^* den Wert $-0,13$ cm. Als Beispiel wird an der Austrittsseite eines Magnetfeldes ein radiales Ionenbündel mit Ionen einheit-

¹⁴ H. J. KUNZE, Diplomarbeit, Technische Hochschule München 1961, S. 70.

licher Energie und Masse (d. h. $\beta = \gamma = \delta = 0$) betrachtet, das in Abb. 8 durch einen Mittelstrahl und zwei Nebenstrahlen repräsentiert wird. Um an den bisherigen Rechnungsgang anzuschließen, wird zunächst nach Abschnitt 1 das Streufeld außer acht gelassen. Die geometrische Polschuhgrenze sei die in Abb. 8 gestrichelt gezeichneten Linie II mit dem Krümmungsradius R . Es liege also ein an dieser Grenze scharf abgeschnittenes Idealfeld vor. Die Ionenstrahlen verlaufen bis zu dieser Grenze II kreisförmig und von da ab geradlinig und sollen sich in der Entfernung l'' in einem Punkt P_i schneiden ($\varepsilon = 45^\circ$, $l'' = r_0 = R = 20$ cm, $\alpha = \pm 1^\circ$). Die in Klammern stehenden Zahlenwerte sind frei gewählt.

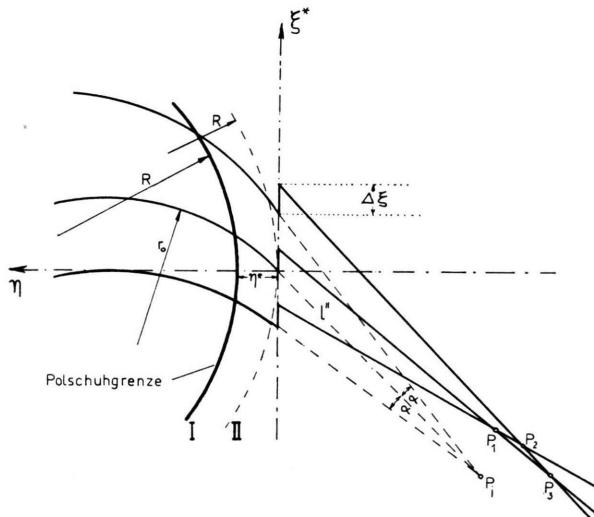


Abb. 8.

Betrachtet man nun dies als Ergebnis einer Rechnung, die nach Abschnitt 2 Richtungsfokussierung dritter Näherung zum Ziel hatte, so ist P_i kein Punkt, sondern das Bündel hat an der Stelle eine Breite

(Öffnungsfehler) von der Größenordnung $r_0 \alpha^4$, also etwa 10^{-5} mm. Denkt man sich das Streufeld wieder als vorhanden, so treten Änderungen im Strahlverlauf ein. Die Effekte 1. Ordnung der Streufeldwirkung werden berücksichtigt durch eine Verschiebung der Polschuhgrenze um die Strecke $-\eta^*$ (also 0,13 cm für die in Abb. 7 dargestellte Streufeldverteilung) bis zu der in Abb. 8 dick ausgezogenen Krümmung I. In Abb. 8 stellt dann die Koordinatenachse ξ^* die Ersatzfeldgrenze dar.

Die Streufeldwirkungen in 2. und 3. Näherung werden durch kleine Verschiebungen und Richtungsänderungen der Ionenstrahlen an dieser Ersatzfeldgrenze ersetzt. Die numerische Auswertung der Formeln in Abschnitt 3.4 mit den oben angegebenen Werten liefert für:

den Mittelstrahl mit $\varepsilon = 45^\circ$: $\Delta\xi = -0,186$ mm,

$$\Delta\varepsilon = 0,001093;$$

den Nebenstrahl mit $\varepsilon = 46^\circ$: $\Delta\xi = -0,214$ mm,

$$\Delta\varepsilon = 0,001759;$$

den Nebenstrahl mit $\varepsilon = 44^\circ$: $\Delta\xi = -0,167$ mm,

$$\Delta\varepsilon = 0,001332.$$

Dabei betragen die Effekte 3. Ordnung etwa 10 bis 20% von den Termen 2. Ordnung, sind also etwa eine Größenordnung kleiner. Die drei Strahlen schneiden sich nunmehr in drei Punkten. Als „Bild“ ist jetzt die engste Einschnürung des Bündels zu betrachten. Die Rechnung ergibt für die Streufeldverteilung der Abb. 7 etwa 0,05 mm für die Bildbreite, wobei gleichzeitig eine Verschiebung des Bildorts gegenüber P_i um 3–4 mm zu größeren l'' -Werten und eine seitliche Versetzung um 0,5 mm auftritt.

Großen Dank schulde ich Herrn Prof. Dr. H. EWALD für die Anregung dieser Arbeit und für zahlreiche Diskussionen.